

PŘÍKLADY K 2. TESTU

Analytická geometrie

1. **Příklad.** Jsou dány dva body $A = [-2, -3, 5]$, $B = [2, 6, -2]$. Najděte rovnici přímky určené body A , B .
2. **Příklad.** Jsou dány dva body $A = [-2, 4, 5]$, $S = [2, 5, -1]$. Najděte bod B symetrický s A podle S .
3. **Příklad.** Jsou dány tři body $A = [-2, 4, 5]$, $B = [2, 5, -1]$ a $C = [4, 0, -1]$. Najděte D tak, aby byl $ABCD$ rovnoběžník.
4. **Příklad.** Jsou dány tři body $A = [-2, 4, 5]$, $B = [3, 5, -1]$ a $C = [5, 0, 5]$. Najděte T těžiště trojúhelníku ABC .
5. **Příklad.** Jsou dány tři body $A = [-2, 4, 5]$, $B = [3, 5, -1]$ a $T = [2, 3, 3]$. Najděte C tak, aby T bylo těžiště trojúhelníku ABC .
6. **Příklad.** Je dána rovina

$$\begin{aligned}\varrho : x &= -3 + t + 2s, t, s \in \mathbb{R}, \\ y &= 1 + 2t - s, \\ z &= -2 + t + s.\end{aligned}$$

Najděte obecný tvar ϱ .

7. **Příklad.** Je dána rovina $\varrho : x + 2y - 3z + 6 = 0$. Najděte parametrický tvar ϱ .
8. **Příklad.** Napište obecnou rovnici roviny α dané třemi body $A = [-2, 3, -5]$, $B = [2, 5, -1]$ a $C = [2, 0, -1]$.
9. **Příklad.** Napište obecnou rovnici roviny α dané bodem $A = [-2, 3, -5]$ a přímkou

$$\begin{aligned}p : x &= 2 + 3t, t \in \mathbb{R}, \\ y &= 7 - 2t, \\ z &= 5 + t.\end{aligned}$$

10. **Příklad.** Jsou dány roviny $\alpha : x - y + 3z - 10 = 0$ a $\beta : 2x + 3y - z - 4 = 0$. Napište parametrický tvar rovnice průsečnice.
11. **Příklad.** Jsou dány roviny $\alpha : x - y + 3z - 10 = 0$ a $\beta = \{(4 + t + s, 3 - 2t - 3s, 2 - 2t - s); t, s \in \mathbb{R}\}$. Napište parametrický tvar rovnice průsečnice.
12. **Příklad.** Jsou dány roviny $\alpha = \{(1 + t + 2s, 3 - t - s, -2 + t - s); t, s \in \mathbb{R}\}$ a $\beta = \{(4 + t + s, 3 - 2t - 3s, 2 - 2t - s); t, s \in \mathbb{R}\}$. Napište parametrický tvar rovnice průsečnice.
13. **Příklad.** Napište obecnou rovnici roviny α procházející bodem $A = [-2, 3, -5]$, která je kolmá na přímkou

$$\begin{aligned}p : x &= 2 + 3t, t \in \mathbb{R}, \\ y &= 7 - 2t, \\ z &= 5 + t.\end{aligned}$$

14. **Příklad.** Vyšetřete vzájemnou polohu přímek $p = \{(1 - 2t, 3 + t, 7 - 3t); t \in \mathbb{R}\}$ a $p = \{(3 + 2t, 7 - 3t, 1 + 5t); t \in \mathbb{R}\}$.
15. **Příklad.** Vyšetřete vzájemnou polohu přímek $p = \{(1 - 2t, 3 + t, 7 - 3t); t \in \mathbb{R}\}$ a $p = \{(3 + 4t, 7 - 2t, 1 + 6t); t \in \mathbb{R}\}$.
16. **Příklad.** Vyšetřete vzájemnou polohu přímek $p = \{(1 - 2t, 3 + t, 7 - 3t); t \in \mathbb{R}\}$ a $p = \{(3 + 4t, 2 - 2t, 4 + 6t); t \in \mathbb{R}\}$.
17. **Příklad.** Vyšetřete vzájemnou polohu přímek $p = \{(1 - 2t, 3 + t, 7 - 3t); t \in \mathbb{R}\}$ a $p = \{(3 + 2t, 2 - 3t, 4 + 5t); t \in \mathbb{R}\}$.
18. **Příklad.** Vyšetřete vzájemnou polohu přímky $p = \{(1 - 2t, 3 + t, 7 - 3t); t \in \mathbb{R}\}$ a roviny $\varrho : 4x - 5y + 3z - 7 = 0$.
19. **Příklad.** Vyšetřete vzájemnou polohu přímky $p = \{(1 - 2t, 3 + t, 7 - 3t); t \in \mathbb{R}\}$ a roviny $\varrho : -3x + 3y + z - 7 = 0$.
20. **Příklad.** Vyšetřete vzájemnou polohu přímky $p = \{(1 - 2t, 3 + t, 7 - 3t); t \in \mathbb{R}\}$ a roviny $\varrho : -3x + 3y + z - 13 = 0$.
21. **Příklad.** Vyšetřete vzájemnou polohu dvou rovin $\alpha = \{(1 + t + 2s, 3 - t - s, -2 + t - s); t, s \in \mathbb{R}\}$ a $\beta = \{(4 + t + s, 3 - 2t - 3s, 2 - 2t - s); t, s \in \mathbb{R}\}$.
22. **Příklad.** Vyšetřete vzájemnou polohu dvou rovin $\alpha = \{(1 + t + 2s, 3 - t - s, -2 + t - s); t, s \in \mathbb{R}\}$ a $\beta = \{(1 + 3t + s, 4 - 2t, -1 - 2s); t, s \in \mathbb{R}\}$.
23. **Příklad.** Vyšetřete vzájemnou polohu dvou rovin $\alpha = \{(1 + t + 2s, 3 - t - s, -2 + t - s); t, s \in \mathbb{R}\}$ a $\beta = \{(4 + 3t + s, 1 - 2t, -2 - 2s); t, s \in \mathbb{R}\}$.
24. **Příklad.** Jsou dány body $A = [1, 1, 1]$, $B = [2, 3, 4]$, $C = [2, 4, 6]$ a $D = [7, -2, 3]$. Napište obecnou rovnici roviny α , která obsahuje bod D a je rovnoběžná s rovinou danou body ABC .
25. **Příklad.** Vypočítejte vzdálenost bodu $B = [1, 5, -6]$ od roviny $\beta : x - 4y + 9z - 25 = 0$.
26. **Příklad.** Vypočítejte souřadnice bodu C , který je pravoúhlým průmětem bodu $B = [1, 5, -6]$ do roviny $\beta : x - 4y + 9z - 25 = 0$.
27. **Příklad.** Vypočítejte souřadnice bodu C , který je symetrický s bodem $B = [1, 5, -6]$ kolem roviny $\beta : x - 4y + 9z - 25 = 0$.
28. **Příklad.** Vypočítejte vzdálenost bodu $A = [3, -5, 1]$ od přímky

$$\begin{aligned} p : x &= 1 - t, t \in \mathbb{R}, \\ y &= 4 + 2t, \\ z &= 3 + 6t. \end{aligned}$$

29. **Příklad.** Jsou dány bod $A = [3, -5, 1]$ a přímka

$$\begin{aligned} p : x &= 1 - t, t \in \mathbb{R}, \\ y &= 4 + 2t, \\ z &= 3 + 6t. \end{aligned}$$

Vypočítejte souřadnice bodu C , který je pravoúhlým průmětem bodu A do přímky p .

30. **Příklad.** Jsou dány bod $A = [3, -5, 1]$ a přímka

$$\begin{aligned} p : x &= 1 - t, t \in \mathbb{R}, \\ y &= 4 + 2t, \\ z &= 3 + 6t. \end{aligned}$$

Vypočítejte souřadnice bodu C , který je symetrický s A podle p .

31. **Příklad.** je dána rovina $\varrho : 3x + 2y - 2z + 17 = 0$ a přímka

$$\begin{aligned} p : x &= 1 + \alpha t, t \in \mathbb{R}, \\ y &= 4 + 2t, \\ z &= 3 - t. \end{aligned}$$

Vypočítejte α tak, aby p byla rovnoběžná s ϱ .

32. **Příklad.** Vypočítejte vzdálenost dvou rovnoběžných rovin

$$\begin{aligned} \alpha : 2x - y + 2z - 3 &= 0, \\ \beta : 2x - y + 2z - 9 &= 0. \end{aligned}$$

33. **Příklad.** Je dána rovina $\alpha : 2x - y + 2z - 3 = 0$. Najděte rovnice rovin β, γ mající od α vzdálenost 4.

34. **Příklad.** Jsou dány body $A = [4, 3, 2]$, $B = [-3, 2, 6]$ a přímka

$$\begin{aligned} p : x &= 2 + t, t \in \mathbb{R}, \\ y &= 3 - 2t, \\ z &= -1 - t. \end{aligned}$$

Najděte na p bod P který má od A i B stejnou vzdálenost.

35. **Příklad.** Je dán bod $A = [4, 3, 2]$ a přímka

$$\begin{aligned} p : x &= 2 + t, t \in \mathbb{R}, \\ y &= 3 - 2t, \\ z &= -1 - t. \end{aligned}$$

Najděte na p body mající od A vzdálenost $\sqrt{5}$.

36. **Příklad.** Je dán bod $A = [4, 3, 2]$ a přímka

$$\begin{aligned} p : x &= 2 + t, t \in \mathbb{R}, \\ y &= 3 - 2t, \\ z &= -1 - t. \end{aligned}$$

Najděte na p body mající od A vzdálenost $\sqrt{21}$.

37. **Příklad.** Je dána rovina $\alpha : x - 2y + 2z + 3 = 0$ a přímka

$$\begin{aligned} p : x &= 2 + t, t \in \mathbb{R}, \\ y &= 3 - 2t, \\ z &= -1 - t. \end{aligned}$$

Najděte na p body mající od α vzdálenost 6.

38. **Příklad.** Vypočítejte odchylku dvou rovin

$$\begin{aligned} \alpha : 2x + 3y + z - 3 &= 0, \\ \beta : 3x + 6y - z - 9 &= 0. \end{aligned}$$

39. **Příklad.** Vypočítejte odchylku roviny a přímky

$$\alpha : x - y + 2z - 3 = 0$$

a přímky

$$p : x = 1 + t, t \in \mathbb{R},$$

$$y = 4,$$

$$z = 3 + 2t.$$

40. **Příklad.** Vypočítejte odchylku dvou přímek $p = \{(1 - 2t, 3 + t, 7 - 3t); t \in \mathbb{R}\}$ a $p = \{(3 + 2t, 7 - 3t, 1 + 5t); t \in \mathbb{R}\}$.
41. **Příklad.** Vypočítejte odchylku dvou přímek $p = \{(1 - 2t, 3 + t, 7 - 3t); t \in \mathbb{R}\}$ a $p = \{(3 + 4t, 7 - 2t, 1 + 6t); t \in \mathbb{R}\}$.
42. **Příklad.** Vypočítejte odchylku dvou přímek $p = \{(1 - 2t, 3 + t, 7 - 3t); t \in \mathbb{R}\}$ a $p = \{(3 + 4t, 2 - 2t, 4 + 6t); t \in \mathbb{R}\}$.
43. **Příklad.** Vypočítejte odchylku dvou přímek $p = \{(1 - 2t, 3 + t, 7 - 3t); t \in \mathbb{R}\}$ a $p = \{(3 + 2t, 2 - 3t, 4 + 5t); t \in \mathbb{R}\}$.
44. **Příklad.** Vypočítejte odchylku přímky $p = \{(1 - 2t, 3 + t, 7 - 3t); t \in \mathbb{R}\}$ a roviny $\varrho : 4x - 5y + 3z - 7 = 0$.
45. **Příklad.** Vypočítejte odchylku přímky $p = \{(1 - 2t, 3 + t, 7 - 3t); t \in \mathbb{R}\}$ a roviny $\varrho : -3x + 3y + z - 7 = 0$.
46. **Příklad.** Vypočítejte odchylku přímky $p = \{(1 - 2t, 3 + t, 7 - 3t); t \in \mathbb{R}\}$ a roviny $\varrho : -3x + 3y + z - 13 = 0$.
47. **Příklad.** Vypočítejte odchylku dvou rovin $\alpha = \{(1 + t + 2s, 3 - t - s, -2 + t - s); t, s \in \mathbb{R}\}$ a $\beta = \{(4 + t + s, 3 - 2t - 3s, 2 - 2t - s); t, s \in \mathbb{R}\}$.
48. **Příklad.** Vypočítejte odchylku dvou rovin $\alpha = \{(1 + t + 2s, 3 - t - s, -2 + t - s); t, s \in \mathbb{R}\}$ a $\beta = \{(1 + 3t + s, 4 - 2t, -1 - 2s); t, s \in \mathbb{R}\}$.
49. **Příklad.** Vypočítejte odchylku dvou rovin $\alpha = \{(1 + t + 2s, 3 - t - s, -2 + t - s); t, s \in \mathbb{R}\}$ a $\beta = \{(4 + 3t + s, 1 - 2t, -2 - 2s); t, s \in \mathbb{R}\}$.
50. **Příklad.** Je dán bod $A = [1, -1, -1]$ a přímka $p = \{(t, 1 + t, 2t); t \in \mathbb{R}\}$. Najděte parametrické rovnice přímky procházející A a protínající p pod úhlem $\pi/3$.
51. **Příklad.** Jsou dány body $A = [2, 3, 1]$, $B = [3, -2, 6]$ a $C = [4, 6, 2]$. Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC .
52. **Příklad.** Jsou dány body $A = [1, 1, 1]$, $B = [2, 3, 4]$, $C = [2, 4, 6]$ a $D = [7, -2, 3]$. Vypočítejte objem čtyřstěnu $ABCD$.
53. **Příklad.** Jsou dány přímky $p : X = [1, -1, 2] + t(-3, 4, 1)$ a $q : X = [3, 0, 4] + t(4, 2, -3)$, $t \in \mathbb{R}$. Najdi vzdálenost těchto přímek.
54. **Příklad.** Jsou dány přímky $p : X = [6, 2, 6] + t(4, 1, 3)$ a $q : X = [1, 0, -3] + t(2, 3, 4)$, $t \in \mathbb{R}$. Najdi střední příčku těchto přímek, tj. přímku r s oběma různoběžnou a k oběma kolmou.
55. **Příklad.** Jsou dány přímky $p : X = [1, -1, 2] + t(-3, 4, 1)$ a $q : X = [3, 0, 4] + t(4, 2, -3)$, $t \in \mathbb{R}$. Najdi střední příčku těchto přímek, tj. přímku r s oběma různoběžnou a k oběma kolmou.

Diferenciální geometrie

56. Příklad.

Vypočítejte hodnotu první křivosti ve vrcholu paraboly $y = x^2 - 6x + 4$ a napište rovnici oskulační kružnice.

57. Příklad.

Vypočtete hodnoty první křivosti ve vrcholech elipsy $x^2/4 + y^2/9 = 1$ a napište rovnice oskulačních kružnic.

58. Příklad.

Vypočtete hodnoty první křivosti ve vrcholech hyperboly $x^2 - y^2/4 = 1$ a napište rovnice oskulačních kružnic.

59. Příklad.

Křivka je dána parametrickou rovnicí $x = t, y = \frac{t^2}{2}, z = \frac{t^3}{3}, t \in \mathbb{R}$.

a) Napište rovnici tečné, normálové a binormálové přímky pro $t = 1$.

b) Napište obecnou rovnici oskulační roviny pro $t = 1$.

60. Příklad.

Prostorová křivka je daná vektorovou rovnicí $\mathbf{x}(t) = (\cos t, \sin t, 2t), t \in [0, 2\pi]$. Napište pro $t = \frac{\pi}{4}$ rovnici oskulační roviny, vypočítejte v tomto bodě poloměr křivosti a najeďte souřadnice středu oskulační kružnice.

61. Příklad.

Určete parametrické rovnice tečny, binormály, hlavní normály a obecné rovnice normálové, oskulační a rektifikační roviny křivky v bodě $\mathbf{r}(t) = (t^3 - t^2 - 5, 3t^2 + 1, 2t^3 - 16)$ v bodě $t = 2$.

Mongeovo promítání

62. Příklad.

Pravotočivá šroubovice má redukovanou výšku $b = 20$, prochází bodem $A = [30, -25, 10]$ a osa $o \perp \pi, [50, 0, 0] \in o$. Přeshroubujte bod A do bodu B o úhel $135^\circ, z_B > z_A$. Zkonstruuje tečnou, normálovou a binormálovou přímku v bodě B .

63. Příklad.

Levotočivá šroubovice má redukovanou výšku $b = 20$, prochází bodem $A = [10, 10, 10]$ a osa $o \perp \pi, [50, 0, 0] \in o$. Přeshroubujte bod A do bodu B o úhel $135^\circ, z_B > z_A$. Zkonstruuje tečnou, normálovou a binormálovou přímku v bodě B .

64. Příklad.

Pravotočivá šroubovice má redukovanou výšku $b = 15$, prochází bodem $A = [70, -20, 10]$ a osa $o \perp \pi, [50, 0, 0] \in o$. Najděte průsečík B dané šroubovice s rovinou $(\infty, \infty, 60)$. Zkonstruuje tečnou, normálovou a binormálovou přímku v bodě B .

65. Příklad.

Levotočivá šroubovice má redukovanou výšku $b = 15$, prochází bodem $A = [70, 20, 10]$ a osa $o \perp \pi, [50, 0, 0] \in o$. Najděte průsečík B dané šroubovice s rovinou $\alpha = (\infty, \infty, 60)$. Zkonstruuje tečnou, normálovou a binormálovou přímku v bodě B .

66. Příklad.

Levotočivá šroubovice má osu $o \perp \pi$ a na jednom závitě prochází po řadě body $A = [50, -33, 0], B = [36, 25, 45]$ a $C = [85, 23, ?]$. Sestrojte

a) Nárys C_2 bodu C .

b) Tečnou, normálovou a binormálovou přímku v bodě C .

67. Příklad.

Pravotočivá šroubovice má osu $o \perp \pi$ a na jednom závitě prochází po řadě body $A = [50, -33, 0]$, $B = [36, 25, 80]$ a $C = [85, 23, ?]$. Sestrojte

a) Nárys C_2 bodu C .

b) Tečnou, normálovou a binormálovou přímkou v bodě C .

68. Příklad.

Jsou dány body $R = [65, -70, 0]$, $S = [110, 40, 85]$, $Z = [50, 0, 0]$. Pravotočivá šroubovice má osu $o \perp \pi$, $Z \in o$ a přímka t daná body P, R je tečnou. Sestrojte

a) Průsečík B dané šroubovice s rovinou $\alpha = (\infty, \infty, 80)$,

b) Tečnou, normálovou a binormálovou přímkou v bodě B , stopy oskulační, normálové a rektifikační roviny.